As relações de commutação de momentum angular que queremos reproduzir são

$$[\hat{J}^z, \hat{J}^+] = \hbar \hat{J}^+ \qquad [\hat{J}^z, \hat{J}^-] = -\hbar \hat{J}^-$$
$$[\hat{J}^+, \hat{J}^-] = 2\hbar \hat{J}^z . \tag{1}$$

Com funções $|J.M\rangle$ que tem bem definida a projeção $\hat{J}^z$ do momentum angular, obtemos uma representação matricial de dim $(2J+1)$ dada por:

$$\boxed{\begin{aligned}
\langle J'M'|\hat{J}^+|JM\rangle &= \delta_{JJ'}\,\delta_{M+1,M'}\,\hbar\,[(J-M)(J+M+1)]^{1/2} ,\\
\langle J'M'|\hat{J}^-|JM\rangle &= \delta_{JJ'}\,\delta_{M-1,M'}\,\hbar\,[(J-M+1)(J+M)]^{1/2} ,\\
\langle J'M'|\hat{J}^z|JM\rangle &= \delta_{JJ'}\,\delta_{MM'}\,\hbar M ,\\
\langle J'M'|\hat{J}^2|JM\rangle &= \delta_{JJ'}\,\delta_{MM'}\,\hbar^2 J(J+1) .
\end{aligned}} \tag{2}$$

As matrizes definidas por (2) conformam uma representação irredutível do grupo de rotações de dim $(2J+1)$, com os operadores $\hat{J}^z$ e $\hat{J}^2$ na forma diagonal.

Na teoria de Schwinger, as duas componentes dos spinores referem-se aos dois tipos de osciladores, que temos chamado 1 e 2. Sabemos que sistemas de dois estados podem ser descritos por matrizes de Pauli. Escrevemos

$$\underset{\sim}{a} \equiv a_1 \underset{\sim}{\chi}_1 + a_2 \underset{\sim}{\chi}_2 \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} , \qquad (3)$$

onde $\underset{\sim}{\chi}_{1,2}$ são os spinores que são autovetores da matriz de Pauli:

$$\underset{\approx}{\sigma}^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

$$\underset{\sim}{\chi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underset{\sim}{\chi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underset{\approx}{\sigma}^z \cdot \underset{\sim}{\chi}_1 = \underset{\sim}{\chi}_1$$

$$\underset{\approx}{\sigma}^z \cdot \underset{\sim}{\chi}_2 = - \underset{\sim}{\chi}_2$$

Daí

$$\underset{\sim}{a}^\dagger = (a_1^\dagger, a_2^\dagger) = a_1^\dagger \cdot \underset{\sim}{\chi}_1^\dagger + a_2^\dagger \cdot \underset{\sim}{\chi}_2^\dagger . \qquad (4)$$

Os operadores números associados são

$$\hat{n}_1 \equiv a_1^\dagger a_1 , \qquad \hat{n}_2 \equiv a_2^\dagger a_2$$

que podem tomar valores inteiros $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$ na representação de números. Em geral o momentum angular pode tomar valores semi-inteiros também. Logo o $\hat{J}^z$ escreve-se como a seguinte contração:

$$\hat{J}^z \equiv \frac{\hbar}{2} \left(\underset{\sim}{a}^\dagger \cdot \underset{\approx}{\sigma}^z \cdot \underset{\sim}{a} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2} (a_1^\dagger, a_2^\dagger) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\,(a_1^+, a_2^+)\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\,(a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2)$$

$$= \frac{\hbar}{2}(\hat{n}_1 - \hat{n}_2) \qquad (5)$$

Este operador é diagonal na representação de número. Sendo os $\underset{\sim}{a}$'s operadores de oscilador harmônico, as relações de comutação entre eles, que usaremos logo, são

$$\left.\begin{array}{c} [a_i, a_j] = [a_i^+, a_j^+] = 0\ , \quad [\hat{n}_i, \hat{n}_j] = 0\ , \\ [a_i, a_j^+] = \delta_{ij} \\ [\hat{n}_i, a_j^+] = \delta_{ij}\, a_j^+ \quad , \quad [\hat{n}_i, a_j] = -\,\delta_{ij}\, a_j \quad . \end{array}\right\} \qquad (6)$$

A relação (5) para a componente $\hat{J}^z$ é generalizada para as outras componentes:

$$\boxed{\hat{J}^\alpha = \frac{\hbar}{2}\left(\underset{\sim}{a}^+ \cdot \underset{\approx}{\sigma}^\alpha \cdot \underset{\sim}{a}\right) \quad , \quad \alpha = x, y, z} \qquad (7)$$

onde $\underset{\approx}{\sigma}^\alpha$ é a respetiva componente da matriz de Pauli. Da mesma maneira são definidos os operadores $\hat{J}^\pm$ em termos de $\underset{\approx}{\sigma}^\pm$. Na representação de número, estes últimos não são diagonais. Em efeito:

$$\hat{J}^+ = \hbar\, a_1^+ a_2 \qquad , \qquad \hat{J}^- = \hbar\, a_2^+ a_1$$

e também

$$\hat{J}^x = \frac{\hbar}{2}(a_1^+, a_2^+)\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}(a_1^+a_2 + a_2^+a_1) \;,$$

$$\hat{J}^y = \frac{\hbar}{2}(a_1^+, a_2^+)\cdot\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix} = \frac{i\hbar}{2}(a_2^+a_1 - a_1^+a_2) \;.$$

Definimos tambem o seguinte operador auxiliar:

Def

$$\hat{j} \equiv \frac{1}{2}(\underset{\sim}{a}^+\cdot\underset{\sim}{a}) = \frac{1}{2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2) \qquad (7')$$

Este operador tem autovalores $0, \frac{1}{2}, 1, 3/2, \ldots$ na representação de número, onde é diagonal.

Mostremos que

$$\hat{J}^2 = \hat{J}^+\cdot\hat{J} = \hbar^2\hat{j}(\hat{j}+1)$$

Em efeito
$$\hat{J}^2 = (\hat{J}^+\cdot\hat{J}) = \sum_\alpha \frac{\hbar^2}{4}(\underset{\sim}{a}^+\cdot\underset{\approx}{\sigma}^\alpha\cdot\underset{\sim}{a})^+\cdot(\underset{\sim}{a}^+\cdot\underset{\approx}{\sigma}^\alpha\cdot a)$$

$$= (\hat{J}^z)^2 + \frac{1}{2}(\hat{J}^+\hat{J}^- + \hat{J}^-\hat{J}^+)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}(\hat{n}_1 - \hat{n}_2)^2 + \frac{1}{2}\hbar^2(a_1^+a_2a_2^+a_1 + a_2^+a_1a_1^+a_2)$$

$$= \hbar^2\left[\frac{\hat{n}_1^2 + \hat{n}_2^2 - 2\hat{n}_1\hat{n}_2}{4} + \frac{2\hat{n}_1(1+\hat{n}_2)}{4} + \frac{2\hat{n}_2(1+\hat{n}_1)}{4}\right]$$

mas lembrar que $[\hat{n}_1, \hat{n}_2] = 0$

$$= \hbar^2\left[\left(\frac{\hat{n}_1+\hat{n}_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(\hat{n}_1+\hat{n}_2)\right]$$

$$= \hbar^2 \, \frac{1}{2}(\hat{n}_1+\hat{n}_2)\left[\frac{1}{2}(\hat{n}_1+\hat{n}_2)+1\right] \quad , \text{ou}$$

$$\boxed{\hat{J}^2 = \hbar^2 \, \hat{j}(\hat{j}+1)} \qquad (8)$$

Se chamarmos j o número $\frac{1}{2}(n_1+n_2)$ que é o autovalor do operador $\hat{j}$, temos que na representação de número $\hat{J}^2$ também é diagonal com autovalores

$$\hbar^2 j(j+1) \, ,$$

sendo que

$$\begin{cases} j = \frac{1}{2}(n_1+n_2) \\ m = \frac{1}{2}(n_1-n_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = j+m \geq 0 \, , \\ n_2 = j-m \geq 0 \, , \end{cases}$$

Relações de comutação:

Calculemos como exemplo o comutador:

$$[\hat{J}^+,\hat{J}^-] = \hbar^2[a_1^\dagger a_2, a_2^\dagger a_1]$$
$$= \hbar^2\{[a_1^\dagger, a_2^\dagger a_1]a_2 + a_1^\dagger[a_2, a_2^\dagger a_1]\}$$
$$= \hbar^2\{[a_1^\dagger, a_1]a_2^\dagger a_2 + a_1^\dagger[a_2, a_2^\dagger]a_1\}$$
$$= \hbar^2\{\hat{n}_1 - \hat{n}_2\} = 2\hbar \cdot \frac{\hbar}{2}(\hat{n}_1-\hat{n}_2) = 2\hbar \, \hat{J}^z$$

As outras relações dadas em (1) também são satisfeitas.

Como regrinha mnemônica, podemos observar o seguinte:

A) associamos à toda partícula de tipo 1 momentum angular $\frac{1}{2}$, e momentum angular $-\frac{1}{2}$ à toda partícula de tipo 2.

Assim a projeção líquida do momentum na direção z é dada por $\hat{J}^z = \frac{\hbar}{2}(\hat{n}_1 - \hat{n}_2)$;

B) O operador $\hat{J}^+ = \hbar a_1^\dagger a_2$ cria uma partícula de tipo 1 e destroi uma de tipo 2. Em total o momentum angular aumenta em uma unidade. $\hat{J}^-$ faz o contrário, o momentum angular é diminuído por $\hat{J}^-$ em uma unidade;

c) O estado fundamental do sistema de osciladores é o vazio, o estado de nenhuma partícula, $|0\rangle$, que satisfaz

$$a_i |0\rangle = 0 \quad , \ i = 1,2$$

Um estado normalizado de muitas partículas é dado por

$$|j\, m\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{j+m}\,(a_2^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\,|0\rangle \qquad (9)$$

com $n_1 = j+m \geq 0$ e $n_2 = j-m \geq 0$

Daqui obtemos, que para j fixo, o máximo valor de m é justamente $j = m_{max}$ e o seu mínimo valor é $m_{min} = -j$. Logo para j fixo o número m pode variar como

$$-j \leq m \leq j$$

Daí que a degenerescência do número j é dada por

$$(2j+1)$$

Calculemos à ação dos operadores $(J^2, J_z, J_\pm)$ sobre os estados

$$|j\,m\rangle = \frac{(a_1^\dagger)^{j+m}(a_2^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\,|0\rangle$$

$$J_z\,|jm\rangle = \frac{\hbar}{2}(n_1-n_2)\,|jm\rangle = \frac{\hbar}{2}(j+m-j+m)\,|jm\rangle$$

$$= m\hbar\,|jm\rangle$$

$$\hat{j}\,|jm\rangle = \frac{1}{2}(n_1+n_2)\,|jm\rangle = \frac{j+m+j-m}{2}\,|jm\rangle$$

$$= j\,|jm\rangle$$

$$J^2|jm\rangle = \hbar^2\hat{j}(\hat{j}+1)\,|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)\,|jm\rangle$$

$$J_+\,|jm\rangle = \hbar a_1^\dagger a_2\,|jm\rangle = \hbar\,\frac{(a_1^\dagger)^{j+m+1}\,a_2\,(a_2^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\,|0\rangle$$

Precisamos calcular $a_2\,(a_2^\dagger)^{j-m} = a_2 a_2^\dagger(a_2^\dagger)^{j-m-1}$

$$= (a_2^\dagger a_2+1)(a_2^\dagger)^{j-m-1} = a_2^\dagger a_2(a_2^\dagger)^{j-m-1} + (a_2^\dagger)^{j-m-1}$$

$$= (a_2^\dagger a_2^\dagger)\,a_2\,(a_2^\dagger)^{j-m-2} + 2(a_2^\dagger)^{j-m-1} = \cdots$$

$$= (a_2^\dagger)^{j-m}a_2 + (j-m)\,(a_2^\dagger)^{j-m-1},$$

Operando sobre o vácuo temos:

$$a_2 (a_2^\dagger)^{j-m} |0\rangle = (a_2^\dagger)^{j-m} \underbrace{a_2 |0\rangle}_{0} + (j-m)(a_2^\dagger)^{j-m-1} |0\rangle$$

logo:

$$J_+ |jm\rangle = \hbar (j-m) \frac{(a_1^\dagger)^{j+m+1} (a_2^\dagger)^{j-m-1}}{\sqrt{(j+m+1)!\,(j-m-1)!}} |0\rangle \frac{\sqrt{(j+m+1)}}{\sqrt{j-m}}$$

$$= \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\ |j, m+1\rangle$$

Da mesma maneira:

$$J_- |jm\rangle = \hbar a_2^\dagger a_1 |jm\rangle = \hbar \frac{a_1 (a_1^\dagger)^{j+m} (a_2^\dagger)^{j-m+1}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}} |0\rangle$$

$$= \hbar (j+m) \sqrt{\frac{j-m+1}{j+m}} \frac{(a_1^\dagger)^{j+m-1} (a_2^\dagger)^{j-m+1}}{\sqrt{(j+m-1)!\,(j-m+1)!}} |0\rangle$$

$$= \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\ |j, m-1\rangle$$

Assim, a algebra completa do momentum angular é dada por

$$\boxed{\begin{aligned} J^2 |jm\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle \\ J_z |jm\rangle &= \hbar m |jm\rangle \\ J_\pm |jm\rangle &= \hbar \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\ |j, m\pm 1\rangle \end{aligned}}$$

$-j \le m \le j$

§ Representação dos Operadores de Rotação

Todos os elementos de matriz de J_z e $J_\pm$ podem ser calculados nos espaços $\{|jm\rangle\}$. Como $(J_z, J_\pm)$ comutam com J^2, o número j é conservado, e temos espaços de representação de dimensão $(2j+1)$,

$$\text{com} \quad -j \le m \le j .$$

Os operadores de rotação podem ser representados nestes mesmos subespaços. Mostremos que os operadores de rotação também conservam o número $\underline{j}$. Seja então um ket rodado:

$$\mathcal{D}(R)|jm\rangle = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\varphi(\hat{n}\cdot\vec{J})\right\}|jm\rangle .$$

Temos:

$$J^2\left[\mathcal{D}(R)|jm\rangle\right] = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\varphi(\hat{n}\cdot\vec{J})\right\} J^2|jm\rangle ,$$

porque J^2 comuta com qualquer componente de $\vec{J}$, em particular com $(\hat{n}\cdot\vec{J}) = J_n$. Assim:

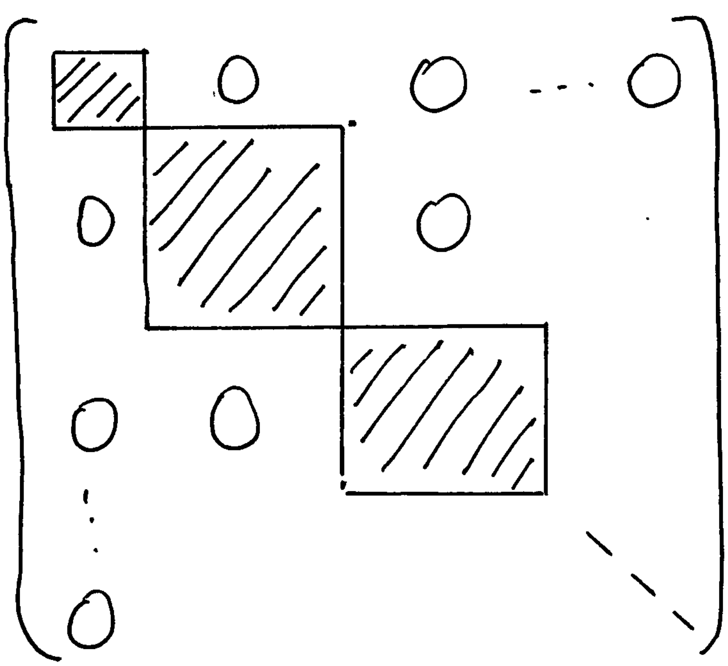
$$J^2\left(\mathcal{D}(R)|jm\rangle\right) = \hbar^2 j(j+1)\left(\mathcal{D}(R)|jm\rangle\right).$$

▶ <u>Resultado</u>: As rotações deixam invariante o número j. Para $\underline{j}$ fixo, temos os elementos de matriz

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R) \equiv \langle j m' | \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_n\right\} | j m \rangle .$$

Elementos de matriz com $j' \neq j$, são identicamente nulos. Estas matrizes $\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)$ de $(2j+1) \times (2j+1)$ são referidas na literatura como "Representações irredutíveis de dim $(2j+1)$ do Grupo de Rotações". Isto significa que a matriz de um operador de rotação $\mathcal{D}(R)$, não necessariamente caraterizada por um único valor de j, pode ser transformada em uma forma de blocos, com uma escolha adequada da base. Cada bloco se refere a um particular espaço com j fixo. Falamos que esta última representação é redutível:

Capa do livro do Sakurai...



Os espaços irredutíveis são invariantes. As propriedades das representações podem ser expressadas em termo de matrizes. Assim, para duas rotações (R_1, R_2), tais que:

$$R_3 = R_1 \cdot R_2$$

$$\mathcal{D}(R_3) = \mathcal{D}(R_1)\mathcal{D}(R_2) = \mathcal{D}(R_1 R_2)$$

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m''m}(R_1 R_2) = \sum_{m'} \mathcal{D}^{(j)}_{m''m'}(R_1)\,\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R_2)$$

Para uma representação unitária temos:

$$\mathcal{D}(R^{-1}) = \mathcal{D}^{-1}(R) = \mathcal{D}^{+}(R)$$

$$\downarrow$$

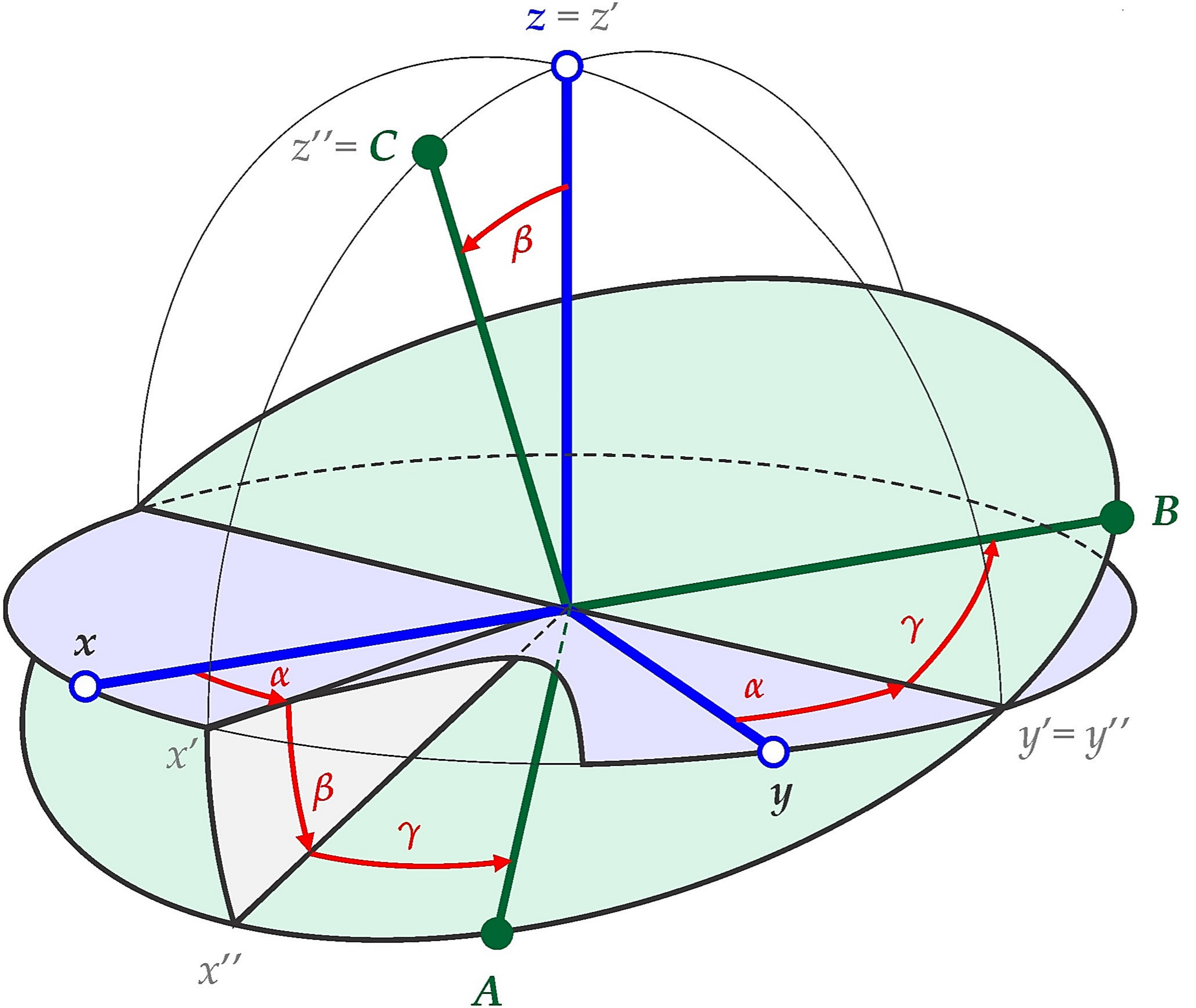
$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R^{-1}) = \mathcal{D}^{(j)*}_{mm'}(R)\,.$$

As equações de transformação são:

$$\mathcal{D}(R)|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle\langle jm'|\mathcal{D}(R)|jm\rangle$$

$$= \sum_{m'} |jm'\rangle\,\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(R)\,,$$

porque os elementos de matriz de $\mathcal{D}(R)$ só ligam kets com o mesmo j. Uma parametrização conveniente é dada em termos dos ângulos de Euler (α, β, γ). Mostramos que uma rotação



z = z′
z′′= C
β
B
x
α
α
γ
x′
β
y′= y′′
y
γ
x′′
A

arbitrária $R(\alpha\beta\gamma)$ pode ser decomposta como:

$$R(\alpha\beta\gamma) = R_{z''}(\gamma)\, R_{y'}(\beta)\, R_z(\alpha)\,,$$
$$= R_z(\alpha)\, R_y(\beta)\, R_z(\gamma)\,,$$

onde a última representação é dada em termos dos eixos fixos. Usamos esta última para calcular os elementos de matriz:

$$\mathcal{D}(R(\alpha\beta\gamma)) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z\right)\cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\beta J_y\right)\cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar}\gamma J_z\right),$$

e

$$\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(\alpha\beta\gamma) = \langle jm' |\, e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z}\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}\; e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma J_z}\, | jm\rangle$$
$$= e^{-i\alpha m'}\; e^{-i\gamma m}\;\langle jm' |\, e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}\, | jm\rangle,$$

e o cálculo fica reduzido a calcular o elemento de matriz:

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) \equiv \langle jm' |\, e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}\, | jm\rangle\,,$$

com

$$\boxed{\mathcal{D}^{(j)}_{m'm}(\alpha\beta\gamma) = e^{-i(m'\alpha + m\gamma)}\, d^{(j)}_{m'm}(\beta)}$$

V

Problema: calcular os elementos de matriz $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ usando a representação de Schwinger.

$$\text{Escrevemos } \mathcal{D}(R) = \mathcal{D}(\alpha\beta\gamma)\Big|_{\alpha=\gamma=0} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\beta J_y\right)$$

$$\mathcal{D}(R)\,|jm\rangle = \frac{\mathcal{D}(R)\,(a_1^\dagger)^{j+m}\,(a_2^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\,|0\rangle$$

$$\mathcal{D}(R)(\overbrace{a_1^\dagger \underbrace{\cdot}_{\mathcal{D}^{-1}\cdot\mathcal{D}} a_1^\dagger \underbrace{\cdot}_{\mathcal{D}^{-1}\cdot\mathcal{D}} \cdots \underbrace{\cdot}_{\mathcal{D}^{-1}\cdot\mathcal{D}} a_1^\dagger}^{j+m}) = \left[\mathcal{D}(R)\,a_1^\dagger\,\mathcal{D}^{-1}(R)\right]^{j+m}\mathcal{D}(R)$$

portanto, fazendo o mesmo processo para o produto $(a_2^\dagger)^{j-m}$:

$$\mathcal{D}(R)\,|jm\rangle = \frac{\left[\mathcal{D}(R)\,a_1^\dagger\,\mathcal{D}^{-1}(R)\right]^{j+m}\left[\mathcal{D}(R)\,a_2^\dagger\,\mathcal{D}^{-1}(R)\right]^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}\,\mathcal{D}(R)|0\rangle$$

Precisamos apenas transformar os operadores de criação:

$$\mathcal{D}(R)\,a_{1,2}^\dagger\,\mathcal{D}^{-1}(R) = e^{-\frac{i}{\hbar}\beta J_y}\cdot a_{1,2}^\dagger\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\beta J_y}$$

Usamos a identidade de Baker-Hausdorff

$$e^{-i\lambda G}\,A\,e^{i\lambda G} = A - i\lambda\,[G,A] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}\,[G,[G,A]] - \frac{(i\lambda)^3}{3!}\,[G,[G,[G,A]]] + \cdots$$

para $\lambda = \frac{\beta}{\hbar}$, $G = J_y$, $A = a_{1,2}^{+}$.

Calculamos o comutador:

$$[J_y, a_{1,2}^{+}] = \frac{i\hbar}{2}[a_2^{+}a_1 - a_1^{+}a_2, a_{1,2}^{+}]$$

Primeiro com a_1^{+}:

$$[J_y, a_1^{+}] = \frac{i\hbar}{2}[a_2^{+}a_1 - a_1^{+}a_2, a_1^{+}]$$

$$= \frac{i\hbar}{2} a_2^{+}[a_1, a_1^{+}] = \frac{i\hbar}{2} a_2^{+},$$

$$[J_y, a_2^{+}] = \frac{i\hbar}{2}[a_2^{+}a_1 - a_1^{+}a_2, a_2^{+}]$$

$$= \frac{i\hbar}{2}\left(-a_1^{+}[a_2, a_2^{+}]\right) = -\frac{i\hbar}{2} a_1^{+}$$

Outros comutadores de ordem maior:

$$[G,[G,A]] = [J_y, [J_y, a_1^{+}]] = \frac{i\hbar}{2}[J_y, a_2^{+}]$$

$$= \left(\frac{i\hbar}{2}\right)\left(\frac{-i\hbar}{2}\right) a_1^{+} = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 a_1^{+}$$

$$[G,[G,[G,A]]] = [J_y, (\tfrac{\hbar}{2})^2 a_1^{+}] = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\left(\frac{i\hbar}{2}\right) a_2^{+}$$

Obtemos a série:

$$\mathcal{D}(R)\,a_1^{+}\,\mathcal{D}^{-1}(R) = a_1^{+} - i\frac{\beta}{\hbar}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)a_2^{+} + \left(\frac{i\beta}{\hbar}\right)^2\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 a_1^{+} -$$

$$- \frac{1}{3!}\left(\frac{i\beta}{\hbar}\right)^3 \frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 a_2^{+} \cdots$$

$$= a_1^{+}\left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \cdots\right) + a_2^{+}\left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\beta}{2}\right)^3 + \cdots\right),$$

ou

$$\boxed{\mathcal{D}(R)\,a_1^{+}\,\mathcal{D}^{-1}(R) = a_1^{+}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + a_2^{+}\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}\,.$$

Analogamente, para a_2^{+} temos:

$$\mathcal{D}(R)\,a_2^{+}\,\mathcal{D}^{-1}(R) = - a_1^{+}\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) + a_2^{+}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right),$$

o que pode ser escrito em forma compacta como

$$\mathcal{D}(R)\begin{pmatrix} a_1^{+} \\ a_2^{+} \end{pmatrix}\mathcal{D}^{-1}(R) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \\ -\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^{+} \\ a_2^{+} \end{pmatrix}$$

Esta fórmula é bastante sugestiva, lembrando que os estados básicos de spin são:

$$|+\rangle = a_1^{+}|0\rangle, \qquad |-\rangle = a_2^{+}|0\rangle$$

e que eles transformam por rotação como:

$$|+\rangle = a_1^{+}|0\rangle \longrightarrow \mathcal{D}(R)|+\rangle = \cos\frac{\beta}{2}\,|+\rangle + \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\,|-\rangle$$

$$= \left(a_1^{+}\cos\frac{\beta}{2} + a_2^{+}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right)|0\rangle ,$$

e

$$|-\rangle = a_2^{+}|0\rangle \longrightarrow \mathcal{D}(R)|-\rangle = -\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\,|+\rangle + \cos\frac{\beta}{2}\,|-\rangle$$

$$= \left(-\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\,a_1^{+} + \cos\frac{\beta}{2}\,a_2^{+}\right)|0\rangle$$

Na fórmula da transformação temos:

$$\left[\mathcal{D}(R)a_1^{+}\mathcal{D}^{-1}(R)\right]^{j+m} = \left[a_1^{+}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + a_2^{+}\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{j+m}$$

e usando a fórmula binomial, notando que $[a_1^{+}, a_2^{+}] = 0$

$$= \sum_k \binom{j+m}{k}\left[a_1^{+}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{j+m-k}\left[a_2^{+}\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^{k}$$

$$= \sum_k \frac{(j+m)!}{(j+m-k)!\,k!}\left(a_1^{+}\cos\frac{\beta}{2}\right)^{j+m-k}\left(a_2^{+}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right)^{k}$$

e para a transformação completa:

$$\mathcal{D}(R)\Big|_{\alpha=\gamma=0}|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle\, d^{(j)}_{m'm}(\beta)$$

$$= \sum_k \sum_\ell \frac{\sqrt{(j+m)!}}{k!\,(j+m-k)!} \frac{\sqrt{(j-m)!}}{\ell!\,(j-m-\ell)!} \left(a_1^\dagger \cos\frac{\beta}{2}\right)^{j+m-k} \times$$

$$\times \left(a_2^\dagger \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right)^{k} \left(-a_1^\dagger \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right)^{j-m-\ell} \left(a_2^\dagger \cos\frac{\beta}{2}\right)^{\ell} \mathcal{D}|0\rangle$$

$$= \sum_k \sum_\ell \frac{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}{k!\,\ell!\,(j+m-k)!\,(j-m-\ell)!} (-1)^{j-m-\ell} \cos\frac{\beta}{2}^{j+m-k+\ell}$$

$$\times \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}^{j-m-\ell+k} \left(a_1^\dagger\right)^{j+\cancel{m}-k+j-\cancel{m}-\ell} \left(a_2^\dagger\right)^{k+\ell} \mathcal{D}|0\rangle$$

Notamos que o vácuo é invariante por rotaçãos:

$$\mathcal{D}(R)|0\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\beta J_y\right)|0\rangle$$

$$= \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\beta \frac{i\hbar}{2}(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2)\right]|0\rangle = \exp\left[\frac{\beta}{2}(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2)\right]|0\rangle$$

$$= \left\{1 - \frac{\beta}{2}(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2) + \cdots\right\}|0\rangle = |0\rangle ,$$

Daí:

$$\mathcal{D}(R)\Big|_{\alpha=\gamma=0} |jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle\, d^{(j)}_{m'm}(\beta)$$

$$= \sum_{m'} d^{(j)}_{m'm}(\beta) \frac{(a_1^\dagger)^{j+m'} (a_2^\dagger)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!\,(j-m')!}} |0\rangle$$

$$= \sum_k \sum_\ell \frac{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!}}{k!\,\ell!\,(j+m-k)!\,(j-m-\ell)!} (-1)^{j-m-\ell} \cos^{j+m-k+\ell}\frac{\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}^{j-m-\ell+k}\frac{\beta}{2} \quad (a_1^+)^{2j-k-\ell} \quad (a_2^+)^{k+\ell} \quad |0\rangle$$

$$= \sum_k \sum_\ell \frac{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!\,(2j-k-\ell)!\,(k+\ell)!}}{k!\,\ell!\,(j+m-k)!\,(j-m-\ell)!} (-1)^{j-m-\ell}$$

$$\cos^{j+m-k+\ell}\frac{\beta}{2} \quad \operatorname{sen}^{j-m-\ell+k}\frac{\beta}{2} \quad \frac{(a_1^+)^{2j-k-\ell} \quad (a_2^+)^{k+\ell}}{\sqrt{(2j-k-\ell)!\ \ (k+\ell)!}} \quad |0\rangle$$

Para identificar os elementos de matriz, eliminamos um índice mediante a transformação

$$\left.\begin{aligned} 2j-k-\ell &= j+m' \\ k+\ell &= j-m' \end{aligned}\right\} \quad m' = j-k-\ell$$

$$\text{ou} \quad \ell = j-k-m'$$

$$j-m-\ell = j-m-(j-k-m') = k+m'-m$$

$$= \sum_{m'} \sum_k \frac{\sqrt{(j+m)!\,(j-m)!\,(j+m')!\,(j-m')!}}{k!\,(j-k-m')!\,(j+m-k)!\,(k+m'-m)!} (-1)^{k+m'-m}$$

$$\cos^{j+m-k+(j-k-m')}\frac{\beta}{2} \quad \operatorname{sen}^{2k+m'-m}\frac{\beta}{2} \quad \frac{(a_1^+)^{j+m'} \quad (a_2^+)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!\ \ (j-m')!}} \quad |0\rangle$$

A variação de $\underline{k}$ é sobre um intervalo onde o argumento das fatoriais são <u>não</u> negativos

$$= \sum_{m'} |jm'\rangle \sum_k (-1)^{k+m'-m} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!}$$

$$\cos^{2j-2k+m-m'} \frac{\beta}{2} \quad \operatorname{sen}^{m'-m+2k} \left(\frac{\beta}{2}\right),$$

de onde obtemos a <u>fórmula de Wigner</u>:

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = \sum_k (-1)^{k+m'-m} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!}$$

$$\cos^{2j-2k+m-m'} \frac{\beta}{2} \quad \operatorname{sen}^{m'-m+2k} \left(\frac{\beta}{2}\right),$$

e para não se preocupar com o intervalo de variação do índice k, a fórmula pode ser escrita em termos da função $\Gamma(z)$, com $\Gamma(n) = (n-1)!$. $\Gamma(z)$ tem um polo em $z=0$. Também para $z = -1, -2, -3, \ldots$. Assim estes termos são cancelados automáticamente da fórmula acima:

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = \sum_{\text{Todo } k} (-1)^{k+m'-m} \frac{\sqrt{\Gamma(j+m+1)\,\Gamma(j-m+1)\,\Gamma(j+m'+1)\,\Gamma(j-m'+1)}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(j-k-m'+1)\,\Gamma(j+m-k+1)\,\Gamma(k+m'-m+1)}$$

$$\times \cos^{2j-2k+m-m'} \beta/2 \quad \operatorname{sen}^{2k+m'-m} (\beta/2)$$

<u>Exemplo</u>: $j=1$, dim 3. Calculemos elementos diagonais e Traço de $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$. Quando $m'=m$, a nossa fórmula pode ser transformada para

$$d^{(j)}_{mm}(\beta) = (j+m)!(j-m)! \sum_k (-1)^k \left[\Gamma(k+1)\Gamma(j-m-k+1)\Gamma(j+m-k+1)\Gamma(k+1)\right]^{-1}$$

$$\times \cos^{2(j-k)}\frac{\beta}{2}\ \text{sen}^{2k}\frac{\beta}{2}$$

a) $m=1$, $j=1$

$k+1>0$, $1-k>0$, $3-k>0$

$k>-1$, $k<1$ $\Rightarrow$ $k=0$, única possibilidade

$$d^{(1)}_{11}(\beta) = \cos^2\frac{\beta}{2}$$

b) $m=0$, $j=1$

$k+1>0$, $2-k>0$ $\Rightarrow$ $k>-1$, $k<2 \Rightarrow k=0,1$

$$d^{(1)}_{00}(\beta) = 1!\,1!\left(\cos^2\frac{\beta}{2} - \text{sen}^2\frac{\beta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1$$

c) $m=-1$, $j=1$

$k+1>0$, $1-k>0$, $\cancel{3}-k>0 \Rightarrow k>-1$, $k<1$

$k=0$

$$d^{(1)}_{\bar{1}\bar{1}}(\beta) = \cos^2\beta/2$$

XIII

$$\mathrm{Tr}\, \mathcal{D}^{(1)}(R)\Big|_{\alpha=\gamma=0} = \sum_{m=1,0,-1} d^{(1)}_{mm}(\beta)$$

$$= 4\cos^2\frac{\beta}{2} - 1 = 4\,\frac{\cos\beta+1}{2} - 1$$

$$= 2\cos\beta + 1 \quad , \quad \text{como deve ser !}$$

Lembrando que a forma canônica de uma rotação com β com eixo $\underline{y}$ tem forma:

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} ,$$

com $\mathrm{Tr}\, R_y(\beta) = 2\cos\beta + 1$